数理解析研究所講究録
794巻 1992年 127-136

Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d,q)$

福工大非常勤　坂内悦子 (Etsuko Bannai)

"良い" conformal field theory に付随した fusion algebra の行列 S ($S^4=I$ をみたしている) に対して次の条件をみたす対角行列 T が存在することが知られている。

(1) $\quad (ST)^3 = S^2$

この性質は modular invariance property と呼ばれている。conformal field theory から離れて純粋に代数学的な見地からもこの modular invariance property がどの様な fusion algebra at algebraic level (詳しくはこの講究録の坂内英一の記事を参照されたい) によってみたされているのか興味が持たれる。ここでは Hamming association scheme $H(d,q)$ からつくられる fusion algebra at algebraic level が modular invariance property をみたしている事を証明する。なお Hamming association scheme $H(d,q)$ の定義等は Bannai-

Ito（[1]）の Chap III Sec2 を参照されたい。

H(d,q) の character table P は次の行列で与えられる。

(2) $$P = \left(K_j(i) \right)_{\substack{0 \le i \le d \\ 0 \le j \le d}}$$

ここで $K_j(\theta)$ は次に定義される Krawtchouk polynomial である。

(3) $$K_j(\theta) = \sum_{u=0}^{j} (-q)^u (q-1)^{j-u} \binom{d-u}{j-u} \binom{\theta}{u}$$

また $K_j(0) = k_j = \binom{d}{j}(q-1)^j \qquad (j=0,1,\cdots,d)$

である。H(d,q) は self dual な association scheme である。すなわち $P = Q\ (=\overline{Q})$, $P^2 = |X| I = q^d I$ が成り立っている。また character table P と行列 S の間の関係式より（この講究録の坂内英一の記事参照）$S^2 = I$ であり対角行列 T が(1)をみたすことは T が次の式をみたすことと同値であることがすぐわかる。

(4) $$(PT)^3 = q^{\frac{3}{2}d} I$$

我々は(1)のかわりに(4)をみたす T の存在を示す。

<u>定理 1.</u> Pを(2)で与えた$H(d, q)$のcharacter tableとする。また対角行列Tを次の様に定義する。

$$T = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \alpha & & \\ & & \alpha^2 & \\ 0 & & & \ddots \; \alpha^d \end{pmatrix}$$

ここでα及びα_0は$\alpha^2+(q-2)\alpha+1=0$および$\alpha_0{}^3 = q^{\frac{d}{2}} / (1+(q-1)\alpha)^d$で定義される複素数である(従ってこの様な$T$は6通りである)。この時$(PT)^3 = q^{\frac{3}{2}d} I$が成り立つ。

(さらに詳しくは[2]を参照されたい。)

系. $H(d, q)$に対してmodular invariance propertyをみたす対角行列が存在する。

Krawtchouk polynomialは多くの人々によって研究されてきた。次にその性質をいくつかあげておく。

Krawtchouk polynomialのgenerating functionは次の式で与えられることが知られている([1] P. 210参照)。

$$(5) \quad \sum_{j=0}^{d} K_j(i)\, t^j = (1+(q-1)t)^{d-i}(1-t)^i$$

(3)より$K_j(i)$はiに関するj次の多項式でありその最高次(j次)の係数は$(-q)^j / j!$で与えられることがすぐ

わかる。すなわち

(6) $$K_j(i) = (-q)^j / j! \cdot \left\{ i^j + \begin{matrix} i\text{に関する高々} \\ j-1\text{次の多項式} \end{matrix} \right\}$$

である。また$K_j(i)$は次の様に書き表わされる事も知られている。

(7) $$K_j(i) = \sum_{u=0}^{j} (-1)^u (q-1)^{j-u} \binom{i}{u} \binom{d-i}{j-u}$$

次に定理1の証明に使われる命題を3つあげておく。

<u>命題 1.</u> $K_i(j)/k_i = K_j(i)/k_j$

ここで $k_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$ である。

この命題は[1]の Theorem2.3(ChapIII) 及び Theorem3.5(ChapII)により証明することができるが(7)を使って直接計算することによっても示すことができる。

<u>命題 2.</u> (i) $\displaystyle\sum_{l=0}^{d} K_l(i) l^s = 0, \quad 0 \leq s < i$

(ii) $\displaystyle\sum_{l=0}^{d} K_l(i) l^i = (-1)^i q^{d-i} i!$

証明. $0 \leq s < i$ をみたす任意の整数sに対して

$\frac{d^s}{dt^s}\left((1-t)^i(1+(q-1)t)^{d-i}\right)_{t=1}=0$ が成り立つ。従って

(5)によって $1\leq s<i$ の時には $\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\ell(\ell-1)\cdots(\ell-s+1)=0$

がまた $s=0$ の時は $\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)=0$ が成り立つ事がわかる。

一方 ℓ^s は $1,\ \ell,\ \ell(\ell-1),\cdots,\ell(\ell-1)\cdots(\ell-s+1)$ の一次結合で表わすことができるから(i)が成り立つ。(ii)については

$$\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\ell^i=\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\left\{\ell(\ell-1)\cdots(\ell-i+1)+\begin{matrix}\ell\text{に関する高々}\\ i-1\text{次の多項式}\end{matrix}\right\}$$

であるから(i)より

$$\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\ell^i=\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\ell(\ell-1)\cdots(\ell-i+1)$$ を得る。

一方(5)より $\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)\ell(\ell-1)\cdots(\ell-i+1)=\frac{d^i}{dt^i}\left(\sum_{\ell=0}^{d}K_\ell(i)t^\ell\right)_{t=1}$

$$=\frac{d^i}{dt^i}\left((1-t)^i(1+(q-1)t)^{d-i}\right)_{t=1}=(-1)^i i!\left(1+(q-1)\right)^{d-i}$$

$=(-1)^i q^{d-i}i!$ であるから(ii)が証明された。

(命題2は $H(d,q)$ の character table の直交関係を使って証明することもできる。)

<u>命題 3.</u> $$\sum_{u=0}^{d}K_u(\ell)\alpha^u u^s=\left(\frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha}\right)^\ell$$

$$\cdot\left(\frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)}\right)^s(1+(q-1)\alpha)^d\cdot\left\{\ell^s+\begin{matrix}\ell\text{に関する高々}s-1\\ \text{次の多項式}\end{matrix}\right\}$$

ここで α は $\alpha^2+(q-2)\alpha+1=0$ で定義される。

証明. $\sum_{u=s}^{d}K_u(\ell)\alpha^u u(u-1)\cdots(u-s+1)=\alpha^s\frac{d^s}{dt^s}\left((1-t)^\ell(1+(q-1)t)^{d-\ell}\right)_{t=\alpha}$

$$= \alpha^s \sum_{u=0}^{s} \binom{s}{u} (-1)^u (q-1)^{s-u} l(l-1)\cdots(l-u+1)\cdot(d-l)(d-l-1)\cdots(d-l-s+u+1)$$

$$\cdot(1-\alpha)^{l-u}(1+(q-1)\alpha)^{d-l-s+u} = (-1)^s \alpha^s (q-1)^s (1-\alpha)^l (1+(q-1)\alpha)^{d-l-s}$$

$$\cdot \sum_{u=0}^{s} \binom{s}{u} \left(\frac{1+(q-1)\alpha}{(q-1)(1-\alpha)}\right)^u \cdot \left\{ l^s + \begin{array}{l} l\text{に関する高々}s-1\text{次} \\ \text{の多項式} \end{array} \right\}$$

$$= (-1)^s \alpha^s (q-1)^s (1-\alpha)^l (1+(q-1)\alpha)^{d-l-s} \left(1+\frac{1+(q-1)\alpha}{(q-1)(1-\alpha)}\right)^s \cdot \left\{ l^s + \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} l\text{に関する高々}s-1 \\ \text{次の多項式} \end{array} \right\} = \left(\frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha}\right)^l \left(\frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)}\right)^s (1+(q-1)\alpha)^d$$

$$\cdot \left\{ l^s + \begin{array}{l} l\text{に関する高々}s-1 \\ \text{次の多項式} \end{array} \right\}$$

一方 u^s は $1, u, u(u-1), \cdots, u(u-1)\cdots(u-s+1)$ の一次結合で表わすことができるからこの命題を s に関する帰納法で証明する事ができる。

さて次に定理1の証明を与えよう。Tを定理1で与えた対角行列とする。この時行列 $(PT)^3$ の (i, j) 成分は

$$\alpha_0^3 \sum_{l,u=0}^{d} K_l(i) K_u(l) K_j(u) \alpha^{l+u+j}$$

となる。(6)によりこれは $\alpha_0^3 \alpha^j (-q)^j / j! \cdot \sum_{l=0}^{d} K_l(i)\alpha^l \cdot \sum_{u=0}^{d} K_u(l)\alpha^u$ $\cdot \left\{ u^j + \begin{array}{l} u\text{に関する高々}j-1\text{次} \\ \text{の多項式} \end{array} \right\}$ に等しいことがわかる。命題3によってこの式は $\alpha_0^3(-\alpha q)^j / j! \cdot \sum_{l=0}^{d} K_l(i) \alpha^l \left(\frac{1-\alpha}{1+(q-1)\alpha}\right)^l$

$$\cdot \left(\frac{-\alpha q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)}\right)^j \cdot (1+(q-1)\alpha)^d \cdot \left\{ l^j + \begin{array}{l} l\text{に関する高々}j-1\text{次} \\ \text{の多項式} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\alpha_0^3 (\alpha q)^{2j} (1+(q-1)\alpha)^{d-j}}{j!\ (1-\alpha)^j} \sum_{l=0}^{d} K_l(i) \left\{ l^j + \begin{array}{l} l\text{に関する高々}j-1\text{次} \\ \text{の多項式} \end{array} \right\}$$

と変形できる。従って命題2によって

$$(PT)^3 \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = 0 \ , \quad i > j$$

$$(PT)^3 \text{ の } (i,i) \text{ 成分} = \frac{\alpha_0^3 (\alpha q)^{2i} (1+(q-1)\alpha)^{d-i} (-1)^i q^{d-i}\, i!}{i!\ (1-\alpha)^i}$$

$$= \alpha_0^3 (1+(q-1)\alpha)^d q^d \left(\frac{-\alpha^2 q}{(1-\alpha)(1+(q-1)\alpha)}\right)^i = q^{\frac{3}{2}d}$$

が得られる。次に $i<j$ の場合は命題1によって $(PT)^3$ の

$$(i,j) \text{ 成分} = \alpha_0^3 \frac{k_j}{k_i} \alpha^{j-i} \sum_{l,u=0}^{d} K_u(j) K_l(u) K_i(l) \alpha^{l+u+i}$$

$$= \alpha_0^3 \frac{k_j}{k_i} \alpha^{j-i} \left\{ (PT)^3 \text{ の } (j,i) \text{ 成分} \right\}$$ を得る。従って

定理1は証明された。

次にいくつかの注を与える。

注1．定理1は coding 理論を用いてより短かく証明することができるがここではその説明を省略する。詳しくは[2]を参照されたい。

注2．$q=2,\ d=2$ の時は $T=\begin{pmatrix}\alpha & & 0\\ & \alpha^{-2} & \\ 0 & & -\alpha\end{pmatrix}$ とすると（ここで α は0でない任意の複素数）$(PT)^3 = 8I$ となる。すなわち modular invariance をみたす対角行列が無数に存在する。また modular invariance をみたす対角行列はこれ等に限る。

注3. $d=2, q>3$ および $q=2$ については $d=3,4$ 又は5の場合 modular invariance をみたす対角行列 T は定理1にあげた6通りに限る。この事の証明には generating function を使った方法が有効である。一般に $q \geqq 2$, $d \geqq 3$ に関しても modular invariance をみたす対角行列は定理1にあげた6通りだけであることが予想される。

次に他の self dual な P and Q-polynomial association scheme についても modular invariance をみたす T が存在するかどうか興味がもたれる。定理1の証明の中では character table に表われる直交多項式の generating function が重要な役割をはたしている。そこで他の P and Q-polynomial association scheme についてもその character table に表われる直交多項式の generating function がどうなっているか調べた。これまで $H(d,q)$ については(5)で与えられる事が知られていた。Johnson association scheme $J(v,d)$ については岡山理大の橋爪道彦氏によって次のとおりである事が最近示された。

$$P = \left(P_j(i) \right)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$$ を $J(v,d)$ の character table とする

と $$F_r(z) = \sum_{j=0}^{d} P_j(r)\, z^j = (1-z)^r \, {}_2F_1\left(-(d-r), -(v-d-r); 1; z\right)$$

ここで ${}_2F_1$ は hyper geometric series である。

他の、[1] で type I と呼ばれている P and Q-polynomial association scheme については次の定理2 から得ることができる。[1] の Chap III によるとこれ等の association scheme の character table $P=\left(P_j(i)\right)_{\substack{0\le i\le d\\0\le j\le d}}$ は $P_j(i)=k_j\ {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix}q^{-i},\ s^*q^{i+1},\ q^{-y},\ sq^{y+1}\\ r_1q,\ r_2q,\ r_3q\end{matrix}\middle|\ q,q\right)$

とあらわされる。ここで ${}_n\varphi_m$ は basic hypergeometric series である。詳しくは [1] を参照されたい。

定理2. $P=\left(P_j(i)\right)_{\substack{0\le i\le d\\0\le j\le d}}$ を type I の association scheme の character table, $F_r(z)$ を $\{P_j(i)\}_{\substack{0\le i\le d\\0\le j\le d}}$ の generating function とする。すなわち

$F_r(z)=\sum_{j=0}^{d}P_j(r)\,z^j$ とする。この時次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) $s^*=0,\ s\ne0,\ r_1=q^{-d-1}$ (従って r_2 又は $r_3=0$)

の時は $$F_r(z)=(z;q)_r\ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}q^{r-d},\ (r_2+r_3)q^{r+1}\\ (r_2+r_3)s^{-1}q^{-d}\end{matrix}\middle|\ q,\ q^{-r-1}s^{-1}z\right)$$

(ii) $s^*=s=0,\ r_1=q^{-d-1}$ (従って $r_2+r_3\ne0$)

の時 $$F_r(z)=(z;q)_r\ {}_2\varphi_0\left(q^{d-r},\ (r_2+r_3)^{-1}q^{-r-1}\ \middle|\ q,\ q^{r-1}z\right)$$

ここで $(z;q)_r = (1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{r-1}z)$ である。

参考文献

1. Bannai-Ito, Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings (1984).

2. Bannai-Bannai, Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d,q)$ (preprint).